1. Опр. ант. игры и её решения

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$, цели игроков

Опр. седл. точки $F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y)$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$

Определение решения игры (x^0, y^0, v)

(x^0, y^0) – с.т., v – значение игры $v = F(x^0, y^0)$

Опр. стратегия x^0 выравнивающая, если

$F(x^0, y) = const$ $\forall y \in Y$

y^0 – выравнивающая, если $F(x, y^0) \equiv const$

а) Если существ. выравнивающие стратегии, то существует седловая точка. Доказать.

б) Привести пример матричной игры, в которой первый имеет выравнивающую стр., а второй нет

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $i^0 = 1$ – выравнивающая

привести пример, когда наоборот второй имеет выравнивающую, а первый нет.

Лемма. $(x^0, y^0), (x^*, y^*)$ – с.т. $\Rightarrow F(x^*, y^*) = F(x^0, y^0) = v$

Корректность определения значения игры.

Задача. Найти решение игры

$$F(x, y) = x^2 y + x^3 y^2 + x y^3 \qquad X = [-1, 1] \qquad Y = [-1, 1]$$

$(0, 0, 0)$ $v = 0$ $x^0 = y^0 = 0$

Задача. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Найти условия на a, b, c, d, при которых матрица A не имеет с.т.

Привести пример матрицы, у которой ровно 6 с.т.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Привести пример 4×4 матрицы, у которой ровно 6 с.т.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У которой ровно 9 с.т.

2. Теорема о необх. и дост. условии сущ. с.т.

Метод поиска всех с.т.

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y) \qquad (\alpha)$$

Если (α), то (x^0, y^0) с.т. $\Leftrightarrow$ x^0 – максиминная, y^0 – минимаксная стр.

Метод поиска всех с.т. $X^0 \times Y^0$ – мн-во всех с.т.

X^0 - мн-во всех максиминных

Y^0 - мн-во всех минимаксных стр.

<u>Задача</u>. Когда $m \times n$-матрица имеет ровно k седловых точек?

решение. Рассмотрим все разложение k на два сомножителя. $k = k_1 \cdot k_2$

Если $k_1 \le m$, $k_2 \le n$ существует матрица с ровно k седл. точками

метод построения.

Пример. 3×3 матрица не имеет ровно 8 с.т

Пример. 3×3-матрица не может иметь ровно 8 с.т.

$8 = 2\cdot 2\cdot 2$. При любом разложении один сомножитель больше 3.

Пример. Может ли матрица 10×10 иметь ровно 72 с.т.?

$72 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 8\cdot 9$. Построим такую матрицу.

Общая схема берём $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, в которой $(1,1)$ – с.т., и

строим $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{8\times 9}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}_{8\times 1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{2\times 9}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Пример. То же вопрос для матрицы 10×10 и 75 с.т.

Ещё метод поиска седловых точек функции $F(x,y)$, определённой на $X \times Y$.

$$X(y) = \operatorname{Arg}\max_{x\in X} F(x,y), \quad Y(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} F(x,y).$$

$$(x^0, y^0) - \text{с.т.} \iff x^0 \in X(y^0), \; y^0 \in Y(x^0).$$

Задача. Пусть матрица A имеет с.т. и i^0 – максиминная стратегия первого игрока. Пусть $j^0 \in Y(i^0)$. Всегда ли (i^0, j^0) с.т.?

Нет. Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Здесь $v = 0$ и все стратегии первого – максиминные.

Берём $i^0 = 1$, $j^0 = 2 \in Y(i^0)$, но $(1,2)$ не с.т.

Если $Y(i^0) = \{j^0\}$, то (i^0, j^0) с.т.

Действительно, в этом случае второй игрок имеет единственную минимаксную стратегию j^0.
В самом деле, берём $\forall$ минимаксную стратегию j^*. Тогда (i^0, j^*) – с.т. и $j^* = j^0$, т.к. $\overline{J}(i^0) = \{j^0\}$.

Ещё задача. Может ли 10×10 матрица, состоящая из 0 и 1 иметь ровно 25 с.т.? $25 = 5 \cdot 5$

Нет. Пусть $v = 0$. Тогда $\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 0$ и любая i – максиминная, а их должно быть 5.
Пусть $v = 1$. Тогда $\overline{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 1$ и любая стратегия j – минимаксная, а их должно быть 5.

Вывод. Если 10×10-матрица имеет ровно 25 с.т., то в ней по меньшей мере 3 различных элемента

3. Условия существования максиминных и минимаксных стратегий.

$F(x,y)$ - непрерывна на $X \times Y$, где X, Y - компакты метрических пр-в.

$W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x,y)$, $M(y) = \max\limits_{x \in X} F(x,y)$ непрерывны

Если $Y(x) = \{y(x)\}$ при любом x, то $y(x)$ непр.

Аналогично, если $X(y) = \{x(y)\}$, то $x(y)$ непр.

<u>Задача</u>. Пусть X, Y - выпуклые компакты евклидовых пространств и существ. единств. ф-ии наилучших ответов. Тогда существ. единств. седл. точка.

Док-во. По теореме 1.2 $x(y)$ и $y(x)$ непрерывны

По теореме Брауэра отображение

$(x, y) \to (x(y), y(x))$ из $X \times Y$ в $X \times Y$

имеет неподвижную точку (x^0, y^0):

$$x(y^0) = x^0, \quad y(x^0) = y^0.$$

Докажем единств. с.т. Пусть (x^*, y^*) ещё одна

и $x^* \neq x^0$. Тогда (x^*, y^0) и (x^0, y^0) — с.т.

и $x^*, x^0 \in X(y^0)$ (противоречие).

$F(x, y) = (1 - xy)^2 (1 + y^2)$ $\quad X = [-1, 1]$, $Y = (-\infty, +\infty)$

найти $y(x)$. Имеет ли $F(x, y)$ с.т. ? $\quad (0,0)$ — с.т.

$\underline{v} = 1$, $\overline{v} = 1$. Если $y = 0$, то $M(y) = 1$

—"— $y \neq 0$, то $M(y) > 1$

Проверка (x°, y°) на седловую точку. Пусть
$F(x,y) = y^7x^2 - xy + 5$. Является ли $(0,1)$ седловой точкой,
если $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$?
$F(0,1) = 5$, $F(0,y) \equiv 5$. $F(x,1) = x^2 - x + 5 \leq 5$, т.к.
$x^2 - x = x(x-1) \leq 0$ при $x \in [0,1] \Rightarrow (0,1)$ с.т.
Если $X = [0,2]$, то нет, т.к. $F(2,1) = 2+5 > 5$ и
неравенство из определения нарушается.

4. Теорема о вогнуто-выпуклой ф-ции.
$F(x,y)$ $\cap_x$ $\cup_y$ X, Y - вып. компактн евкл. пр-в,
$F(x,y)$ - непр. $\Rightarrow$ сущ. с.т.
Если $Y(x) = \{y(x)\}$, то выпуклость F по y можно не требовать
две теоремы. Если $X(y) = \{x(y)\}$, то вогнутость по x не требуем

Метод поиска. Пусть $Y(x) = \{y(x)\}$

находим максиминную стратегию x^0 и $(x^0, y(x^0))$ – с.т.

Пусть $X(y) = \{x(y)\}$. Находим минимаксную стратегию y^0 и $(x(y^0), y^0)$ – седл. т.

Пример. $F(x,y) = (x-y)^2 - 2(x^2-x)$, $X=[0,1]$, $Y=[0,1]$.

Здесь $Y(x) = \{y(x) = x\}$ $F(x,y(x)) = W(x) = -2(x^2-x)$

$x^0 = \frac{1}{2}$ $v = \underline{v} = W(x^0) = \frac{1}{2}$.

$y^0 = \frac{1}{2}$ (x^0, y^0) с.т. т.к. F вогн. по x $(-x^2 + \dots)$

Если $F(x,y) = (x-y)^2 - x^2 + x$, то F линейна по x и метод проходит

Если $F(x,y) = 2(x-y)^2 - x^2 + x$, то

F – выпукла по x и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ не явл. седл. точкой.

В самом деле, $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $F(x, \frac{1}{2}) = 2(x - \frac{1}{2})^2 - x^2 + x$

$\le \frac{1}{4}$ не вып.

Здесь можно утверждать, что с.т. не существует.
Действительно, если (x^0, y^0) – с.т. то необходимо
$y^0 = x^0$ и $x^0 = \frac{1}{2}$ – максиминная стратегия, но
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – не с.т.

Аналогичная задача с
функцией $F(x,y) = -(x-y)^2 + y^2 - y$
и F выпукла по y
Здесь $X(y) = \{x(y) = y\}$ (линейна)

Пусть $Y(x) = \{y(x)\}$ и F не вогнута по x.
Как доказать отсутствие или наличие с.т.
Находим x^0 – максиминную стр. и $\underline{v}$.
Затем проверяем нер-во $F(x, y(x^0)) \le \underline{v}$. Если выполн., то $(x^0, y(x^0))$ с.т.